Proceedings of IAM, V.2, N.2, 2013, pp.113-136

МЕТОД РЯДОВ В РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ДОБЫЧЕ НЕФТИ*

Н.А. Алиев[1], Фикрет А. Алиев[2], А.П. Гулиев[2], М.Х. Ильясов[3]

[1]Факультет Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[3]Национальная Авиационная Академия, Баку, Азербайджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com

Резюме. Рассматривается математическая модель газлифта, где движение газа и газожидкостной смеси в соответствующих областях описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Показывается, что при соответствующих граничных условиях задача имеет единственное решение и начальные условия не могут быть произвольными, т.е. они зависят от выбора граничных условий. Далее, переход движения от конца кольцевого труба в начало подъемника производится с помощью импульсных систем, где правая часть выбирается в виде квадратичного многочлена от конца траектории в кольцевой части трубы (парабола с направленными вниз ветвями). На основе метода бесконечных рядов приводится численный алгоритм для решения предложенной граничной задачи и восстанавливается траектория для давления и объема ГЖС в каждой точке подъемника. На конкретном примере из практики показывается адекватность математической модели.

Ключевые слова: гиперболическая система, математическая модель, газлифт, краевая задача, импульсная система, бесконечный ряд.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

Как известно после фонтанного метода одним из основных способов добычи нефти является газлифтный процесс [1, 2] Несмотря на то, что этот способ был использован на нефтепромыслах Баку Братьями Нобель [3], до настоящего времени отсутствует адекватная математическая модель [2] для этого рода добычи нефти.

Как показано в [4, 5] движение в кольцевом пространстве и подъемнике описывается существенно нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. В [5] показано, что для решения общей задачи газлифта надо построить оптимальную програмную траекторию и управление и далее обеспечить оптимальную стабилизацию движения ГЖС около этих режимов. Поскольку в общей

* Работа поддержана совместным грантом НАНА и ГНКАР № 17, 2013-2015 г.
Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 03.12.2013.

постановке эта задача является достаточно сложной (учет вязкости, многофазности и др.) и в этой постановке нельзя найти закономерность этого процесса, в работе [5] авторы упрощают саму постановку задачи, считая подаваемый газ идеальным. Как отмечено в [4, 5, 6] системы уравнений, описывающих движение в разных областях, отличаются друг от друга только значениями заданных коэффициентов (скорость звука, плотность, газа и газожидкостной смеси и др).

В работе [5] для простоты, заданные уравнения движения осредняются по времени t или по координатам x и нахождение оптимальных режимов задачи газлифта плоской сводится к решению соответствующей задачи оптимального управления. Однако, в этих упрощениях нельзя константировать, что найденные решения осредненной задачи описывают процесс газлифта математически точно [5]. Поэтому, в настоящей работе рассматриваются движения в газлифтных процессах в более общей постановке. Для простоты уравнение движения гиперболического типа берется линейным (отсутствуют вязкость, многофазность и др.) и рассматриваются только граничные условия в одном конце $(x = 0)$). С помощью метода бесконечных рядов приводятся конкретные приближенные формулы для решения рассматриваемой задачи. Показывается, что с помощью этих граничных условий можно приближенно восстановить и начальные условия. С помощью оценки погрешности получены трансендентные уравнения для определения числа слагаемых N в рядах которые обеспечивают приближенное решение с любой точностью £ > 0 (£ $-$ достаточно малое число).

Для решения конкретного практического примера предлагается вычислительный алгоритм. Сравнивая числовые результаты с практическими данными, можно утверждать, что предложенная математическая модель является адекватной и её можно использовать при моделировании добычи нефти газлифтным способом [5].

2. Постановка задачи и метод рядов

При добыче нефти основное внимание уделяются газлифтному способу [1, 4, 5], где движение в кольцевом трубопроводе и подъемнике описываются следующей системой дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа

$$\begin{cases} -F_i \dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + 2a_i Q(x,t), \quad i = 1,2; \\ -F_i \dfrac{\partial P(x,t)}{\partial t} = c_i \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x}, \quad x \in (0,l) \cup (l,2l); \quad t \in (0,T), \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями на одном конце $x = 0$.

$$\begin{cases} P(0,t) = P_0(t), \\ Q(0,t) = Q_0(t), \qquad t \in [0,T], \end{cases} \tag{2}$$

где $i = 1$ означает, что движение выполняется в кольцевой трубе $x \in (0,l)$, а $i = 2$ в подъемнике $x \in (l,2l)$. Здесь $F_i, a_i, c_i (i = 1,2)$ заданные вещественные числа, $P_0(t)$ и $Q_0(t)$ заданные непрерывные вещественно-значные функции, а $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ искомые функции.

Решение граничной задачи (1), (2) в кольцевой части, т.е. при $i = 1$ разыщем в виде ряда по x [6, 7]

$$\begin{cases} P(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \frac{x^k}{k!}, \\ Q(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t) \frac{x^k}{k!}. \end{cases} \tag{3}$$

Из последних представлений (3) видно, что граничные условия (2) удовлетворяются автоматически. Здесь $P_k(t)$ и $Q_k(t)$, при $k > 0$ неизвестные действительные функции, для определения которых дифференцируя (3) как по x так и по t, имеем:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[P_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) \frac{x^k}{k!} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) \frac{x^k}{k!} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+1}(t) \frac{x^k}{k!}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k'(t) \frac{x^k}{k!}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[Q_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \frac{x^k}{k!} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \frac{x^k}{k!} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{k+1}(t) \frac{x^k}{k!}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k'(t) \frac{x^k}{k!}. \tag{7}$$

Поставляя (3) - (7) в (1) получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} -F_1 \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+1}(t) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k'(t) \frac{x^k}{k!} + 2a_1 \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t) \frac{x^k}{k!}, \\ -F_1 \sum_{k=0}^{\infty} P_k'(t) \frac{x^k}{k!} = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} Q_{k+1}(t) \frac{x^k}{k!}. \end{cases}$$

Переведя все слагаемые в левую часть и группируя получим:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty}\left[-F_1P_{k+1}(t)-Q'_k(t)-2a_1Q_k(t)\right]\dfrac{x^k}{k!}=0, \\ \sum_{k=0}^{\infty}\left[-F_1P_k{}'(t)-c_1Q_{k+1}(t)\right]\dfrac{x^k}{k!}=0. \end{cases}$$

Учитывая линейную независимость функций $\dfrac{x^k}{k!}$, при $k \ge 0$, имеем:

$$\begin{cases} -F_1P_{k+1}(t)-Q'_k(t)-2a_1Q_k(t)=0, \\ -F_1P_k{}'(t)-c_1Q_{k+1}(t)=0, \end{cases}$$

или же систему линейных разностных уравнений [8]

$$\begin{cases} P_{k+1}(t)=-\dfrac{1}{F_1}Q'_k(t)-\dfrac{2a_1}{F_1}Q_k(t), \\ Q_{k+1}(t)=-\dfrac{F_1}{c_1}P'_k(t), \end{cases} \qquad k \ge 0. \tag{8}$$

С помощью метода математической индукции из (8) получаем следующую закономерность, при $k=0$,

$$\begin{cases} P_1(t)=-\dfrac{1}{F_1}\dfrac{dQ_0(t)}{dt}-\dfrac{2a_1}{F_1}Q_0(t)=-(\dfrac{d}{dt}+2a_1)\dfrac{Q_0(t)}{F_1}, \\ Q_1(t)=-\dfrac{F_1}{c_1}\dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\dfrac{F_1P'_0(t)}{c_1}, \end{cases} \tag{9}$$

при $k=1$,

$$\begin{cases} P_2(t)=-\dfrac{1}{F_1}\dfrac{dQ_1(t)}{dt}-\dfrac{2a_1}{F_1}Q_1(t)=-\dfrac{1}{F_1}\left[-\dfrac{F_1}{c_1}\dfrac{dP_0(t)}{dt}\right]- \\ -\dfrac{2a_1}{F_1}\left[-\dfrac{F_1}{c_1}\dfrac{dP_0(t)}{dt}\right]=\dfrac{1}{c_1}\dfrac{d^2P_0(t)}{dt^2}+\dfrac{2a_1}{c_1}\dfrac{dP_0(t)}{dt}= \\ =(\dfrac{d}{dt}+2a_1)\dfrac{P'_0(t)}{c_1}, \\ Q_2(t)=-\dfrac{F_1}{c_1}P'_1(t)=-\dfrac{F_1}{c_1}\dfrac{d}{dt}\left[-(\dfrac{d}{dt}+2a_1)\dfrac{Q_0(t)}{F_1}\right]= \\ =(\dfrac{d}{dt}+2a_1)\dfrac{Q'_0(t)}{c_1}, \end{cases} \tag{10}$$

при $k=2$,

$$
\begin{cases}
P_3(t) = -\dfrac{1}{F_1} Q_2'(t) - \dfrac{2a_1}{F_1} Q_2(t) = -\dfrac{1}{F_1}\dfrac{d}{dt}(\dfrac{d}{dt} + 2a_1)\dfrac{Q_0'(t)}{c_1} - \\
-\dfrac{2a_1}{F_1}(\dfrac{d}{dt} + 2a_1)\dfrac{Q_0'(t)}{c_1} = -(\dfrac{d}{dt} + 2a_1)(\dfrac{d}{dt} + 2a_1)\dfrac{Q_0'(t)}{F_1 c_1} = \\
-(\dfrac{d}{dt} + 2a_1)^2 \dfrac{Q_0'(t)}{F_1 c_1}, \\
Q_3(t) = -\dfrac{F_1}{c_1} P_2'(t) = -\dfrac{F_1}{c_1}(\dfrac{d}{dt} + 2a_1)\dfrac{P_0''(t)}{c_1} = \\
= -(\dfrac{d}{dt} + 2a_1)\dfrac{F_1 P_0''(t)}{c_1^2},
\end{cases}
\tag{11}
$$

при $k = 3$,

$$
\begin{cases}
P_4(t) = -\dfrac{1}{F_1} Q_3'(t) - \dfrac{2a_1}{F_1} Q_3(t) = -\dfrac{1}{F_1}(\dfrac{d}{dt} + 2a_1) \times \\
\times \left[-(\dfrac{d}{dt} + 2a_1)\dfrac{F_1 P_0''(t)}{c_1^2} \right] = (\dfrac{d}{dt} + 2a_1)^2 \dfrac{P_0''(t)}{c_1^2}, \\
Q_4(t) = -\dfrac{F_1}{c_1} P_3'(t) = -\dfrac{F_1}{c_1}\left[-(\dfrac{d}{dt} + 2a_1)^2 \dfrac{Q_0''(t)}{F_1 c_1} \right] = \\
= (\dfrac{d}{dt} + 2a_1)^2 \dfrac{Q_0''(t)}{c_1^2}.
\end{cases}
$$

(12) Учитывая эти закономерности, полученные с помощю (9)-(12) имеем:

$$
\begin{cases}
P_{2k}(t) = \left(\dfrac{d}{dt} + 2a_1 \right)^k \dfrac{P_0^{(k)}(t)}{c_1^k}, \\
Q_{2k}(t) = \left(\dfrac{d}{dt} + 2a_1 \right)^k \dfrac{Q_0^{(k)}(t)}{c_1^k},
\end{cases}
\qquad k \geq 0,
\tag{13}
$$

и

$$
\begin{cases}
P_{2k+1}(t) = -\left(\dfrac{d}{dt} + 2a_1 \right)^{k+1} \dfrac{Q_0^{(k)}(t)}{F_1 c_1^k}, \\
Q_{2k+1}(t) = -\left(\dfrac{d}{dt} + 2a_1 \right)^k \dfrac{F_1 P_0^{(k+1)}(t)}{c_1^{k+1}},
\end{cases}
\qquad k \geq 0.
\tag{14}
$$

Таким образом, имеем следующее утверждение:

Теорема 1. Если F_1, a_1, c_1 действительные постоянные числа, $P_0(t)$, $Q_0(t)$ принадлежат $C^{(\infty)}(0,T)$ и удовлетворяют следующим соотношениям

$$\left|P_0^{(k)}(t)\right| \le M, \quad \left|Q_0^{(k)}(t)\right| \le M, \quad k \ge 0,$$

$$\left|\frac{1+2a_1}{c_1}\right| < 1,$$

то определенные из (13) и (14) функции $P_k(t)$ и $Q_k(t)$ ограниченные и ряды (3) сходятся абсолютно и равномерно.

Доказательство теоремы 1 следует из оценки функции (13) и (14).

Замечание. Если $\left|P_0^{(k)}(t)\right| < M^{k+1}$, $\left|Q_0^{(k)}(t)\right| < M^{k+1}$, при $k \ge 0$ и $\left|\frac{1+2a_1}{c_1}\right| \le N$, то ряды (3) опять сходятся абсолютно и равномерно.

3. Оценка погрешности решений

Если в решении (3) взять $(2N_1+1)$ слагаемых, то для погрешности решений граничных задач (1), (2) имеются

$$\tilde{P}_{2N_1+1}(x,t) = \sum_{k=2N_1+1}^{\infty} P_k(t)\frac{x^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=N_1}^{\infty} P_{2k+1}(t)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} P_{2k}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

и

$$\tilde{Q}_{2N_1+1}(x,t) = \sum_{k=2N_1+1}^{\infty} Q_k(t)\frac{x^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=N_1}^{\infty} Q_{2k+1}(t)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} Q_{2k}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

и далее получим следующие оценки для погрещенностей $\tilde{P}_{2N+1}(x,t)$ и $\tilde{Q}_{2N+1}(x,t)$,

$$\left|\tilde{P}_{2N_1+1}(x,t)\right| \le \sum_{k=N_1}^{\infty} \left|P_{2k+1}(t)\right|\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \left|P_{2k}(t)\right|\frac{x^{2k}}{(2k)!} \le$$

$$\le M\sum_{k=N_1}^{\infty}(1+2a_1)^{k+1}\frac{1}{F_1c_1^k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+M\sum_{k=N_1+1}^{\infty}(1+2a_1)^k\frac{1}{c_1^k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\le$$
$$\le M\sum_{k=N_1}^{\infty}\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2k+1}}{F_1(2k+1)!}\cdot\sqrt{c_1(1+2a_1)}+M\sum_{k=N_1+1}^{\infty}\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2k}}{(2k)!}. \tag{15}$$

Если

$$\tilde{M}=\max\left\{M\frac{\sqrt{c_1(1+2a_1)}}{F_1},\ M\right\},$$

то из (15) имеем:

$$\left|\tilde{P}_{2N_1+1}(x,t)\right|\le\tilde{M}\sum_{k=2N_1+1}^{\infty}\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{k}}{(k)!}=\tilde{M}\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2N_1+1}}{(2N_1+1)!}\times$$
$$\times\left[1+\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{2N_1+2}+\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2}}{(2N_1+2)(2N_1+3)}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{S-1}}{(2N_1+2)(2N_1+3)\ldots(2N_1+S)}+\ldots\right]<$$
$$<\tilde{M}\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2N_1+1}}{(2N_1+1)!}\left[1+\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{2N_1+2}+\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2}}{(2N_1+2)^2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{S-1}}{(2N_1+2)^{S-1}}+\ldots\right]=\tilde{M}\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2N_1+1}}{(2N_1+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{2N_1+2}},$$

и

$$\left|\tilde{Q}_{2N_1+1}(x,t)\right| \le \sum_{k=N_1}^{\infty} \left|Q_{2k+1}(t)\right| \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} +$$

$$+\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \left|Q_{2k}(t)\right| \frac{x^{2k}}{(2k)!} \le M \sum_{k=N_1}^{\infty} (1+2a_1)^k \frac{F_1}{c_1^{k+1}} \times$$

$$\times \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + M \sum_{k=N_1+1}^{\infty} (1+2a_1)^k \frac{1}{c_1^k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \le \tag{16}$$

$$\le M \sum_{k=N_1}^{\infty} \frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{F_1}{\sqrt{(1+2a_1)}\sqrt{c_1}} +$$

$$+ M \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2k}}{(2k)!}.$$

Если

$$\tilde{\tilde{M}} = \max\left\{ M \frac{F_1}{\sqrt{c_1(1+2a_1)}},\ M \right\},$$

то из (16) получим:

$$\left|\tilde{P}_{2N_1+1}(x,t)\right| \le \tilde{M} \frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2N+1}}{(2N_1+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{2N_1+2}}, \tag{17}$$

и

$$\left|\tilde{Q}_{2N_1+1}(x,t)\right| \le \tilde{\tilde{M}} \frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2N_1+1}}{(2N_1+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{2N_1+2}}, \tag{18}$$

где

$$\tilde{P}_{2N_1+1}(x,t)=P(x,t)-P_{2N_1}(x,t)=\sum_{k=2N_1+1}^{\infty}P_k(t)\frac{x^k}{k!},$$

$$\tilde{Q}_{2N_1+1}(x,t)=Q(x,t)-Q_{2N_1}(x,t)=\sum_{k=2N_1+1}^{\infty}Q_k(t)\frac{x^k}{k!}.$$

Отметим, что при помощи оценок (17) и (18) можно определить число слагаемых в (3), т.е. при заданном малом параметре £ можно найти $2N_1$.

4. Определение числа слагаемых рядов (3)

Из (17) и (18), приняв обозначение $M_1=\max\left\{\tilde{M},\tilde{\tilde{M}}\right\}$, определение числа слагаемых $2N_1$ сводится к решению некоторого нелинейного трансцендентного уравнения. Докажем этого.

Так как из (17) и (18)

$$\frac{\left(l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}\right)^{2N_1+1}}{(2N_1+1)!}=\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{1}\cdot\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{2}\cdot\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{3}\cdots$$

$$\cdots\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{2N_1+1}\le\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{2N_1+1}\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{k}}{2N_1+1}\right]^{2N_1+1}=$$

$$=\left(\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{2N_1+1}\right)^{2N_1+1}\left(\sum_{k=1}^{2N_1+1}\frac{1}{k}\right)^{2N_1+1}\approx$$

$$\approx\left[\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{2N_1+1}\ln(2N_1+1)\right]^{2N_1+1}\le\left(\frac{l\sqrt{\frac{1+2a_1}{c_1}}}{(2N_1+1)^{1-0,1}}\right)^{2N_1+1}. \qquad (19)$$

Выбирая $£>0$ из (19) для определения N_1 имеем следующее соотношение

$$\left[\frac{l\sqrt{\dfrac{1+2a_1}{c_1}}}{(2N_1+1)^{1-0.1}}\right]^{2N_1+1} = \text{£}^{\,2N_1+1},$$

т.е.

$$\frac{l\sqrt{\dfrac{1+2a_1}{c_1}}}{(2N_1+1)^{0.9}} = \text{£},$$

или же

$$2N_1+1 = \left(\frac{l\sqrt{\dfrac{1+2a_1}{c_1}}}{\text{£}}\right)^{\frac{10}{9}}. \qquad (20)$$

Таким образом, для определения числа слагаемых рядов (3), например, при $\text{£} = 0{,}9$ получим следующее выражение

$$(2N_1+1) = \left[\left(\frac{l\sqrt{\dfrac{1+2a_1}{c_1}}}{0.9}\right)^{\frac{10}{9}}\right],$$

где $[\ ]-$есть целая часть правой части формулы (20). Здесь погрешность решения задачи (1), (2) будет иметь порядок $(0.9)^{2N_1+1}$.

Отметим, что (20) позволяет найти число слагаемых рядов (3), которое обеспечивает нахождение приближенного решение уравнения (1) с точностью £ .

5. Математические задачи газлифта

Отметим, что соотношения (3), (20) позволяет найти решение задачи газлифта в общей постановке, но как в [9] надо к концу кольцевой части и началу подъемника добавить к системе дифференциальных уравнений (1) с граничными условиями (2). Таким образом, предположим, что в призабойной зоне движение ГЖС описываются следующей импульсной системой

$$P(l+0,t) = F_{\text{¢}}^{1} P(l-0,t) + \text{¡}_1 (P(l-0,t), \sim_1, \sim_2, \sim_3) \overline{P}(t), \qquad (21)$$

$$Q(l+0,t)=F_{¢}^{2}Q(l-0,t)+\text{¡}_2(Q(l-0,t),\ {}_1,\ {}_2,\ {}_3)\overline{Q}(t),$$

где $\text{¡}_1(\cdot)$, $\text{¡}_2(\cdot)$ непрерывные функции от своих аргументов, а $\overline{P}(t)$, $\overline{Q}(t)$ заранее заданные непрерывные функции, являющееся возможным балансом нефтепродуктов [10].

Тогда, в кольцевой зоне уравнения (1)-(3), при $i=1$ описывает движение газа и с помощью импульсных систем (21) приводятся $P(l-0,t)$, $Q(l-0,t)$ к $P(l+0,t)$, $Q(l+0,t)$ которые для уравнения (1) при $i=2$ являются граничными условиями [9,11,12].

Теперь рассмотрим метод рядов для задачи газлифта (1), (2), (21). Пусть движение в кольцевом пространстве описывается уравнением (1) с граничным условием (2). Тогда решение находится в виде (3) и в начале призабойной зоны $(l-0,t)$ для P и Q имеем

$$P(l-0,t)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)\frac{l^k}{k!},\qquad Q(l-0,t)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(t)\frac{l^k}{k!}. \tag{22}$$

Подставляя эти соотношения в (21), для $P(l+0,t)$, $Q(l+0,t)$ имеем

$$\begin{cases} P(l+0,t)=F_{¢}^{1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_k(t)\dfrac{l^k}{k!}+\text{¡}_1\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_k(t)\dfrac{l^k}{k!},\sim_1,\sim_2,\sim_3\right)\overline{P}(t),\\ Q(l+0,t)=F_{¢}^{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}Q_k(t)\dfrac{l^k}{k!}+\text{¡}_2\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_k(t)\dfrac{l^k}{k!},\ {}_1,\ {}_2,\ {}_3\right)\overline{Q}(t). \end{cases} \tag{23}$$

Теперь при $i=2$ для решения граничной задачи (1), (23) имеем соотношение подобно (3), т.е. для задачи

$$\begin{cases} -F_2\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x}=\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t}+2a_2Q(x,t),\\ -F_2\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial t}=c_2\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x}, \qquad x\in(l,2l),\ t\in(0,T), \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} P(l,t)=P(l+0,t)=\overline{P}_0(t),\\ Q(l,t)=P(l+0,t)=\overline{Q}_0(t), \qquad t\in(0,T), \end{cases}$$

имеем

$$\begin{cases} P(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k(t)\dfrac{x^k}{k!},\\ Q(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{Q}_k(t)\dfrac{x^k}{k!}, \qquad x\in(l,2l),\ t\in(0,T). \end{cases} \tag{25}$$

Подобно предыдущему случаю, дифференцируя (25) как по x, и по t, подставляя в (24) имеем:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{P}_{k+1}(t)\frac{x^k}{k!},\qquad \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k'(t)\frac{x^k}{k!},$$

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{Q}_{k+1}(t)\frac{x^k}{k!},\qquad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{Q}_k'(t)\frac{x^k}{k!},$$

$$\begin{cases}-F_2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{P}_{k+1}(t)\dfrac{x^k}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{Q_k'}(t)\dfrac{x^k}{k!}+2a_2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{Q}_k(t)\dfrac{x^k}{k!},\\ -F_2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{P_k'}(t)\dfrac{x^k}{k!}=c_2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{Q}_{k+1}(t)\dfrac{x^k}{k!},\end{cases}$$

которая после группировки имеет вид:

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[-F_2\overline{P}_{k+1}(t)-\overline{Q}_k'(t)-2a_2\overline{Q}_k(t)\right]\dfrac{x^k}{k!}=0,\\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[-F_2\overline{P}_k{}'(t)-c_2\overline{Q}_{k+1}(t)\right]\dfrac{x^k}{k!}=0,\end{cases}$$

или с учетом линейно независимости $\dfrac{x^k}{k!}$ при $k\ge 0$ имеем:

$$\begin{cases}-F_2\overline{P}_{k+1}(t)-\overline{Q}_k'(t)-2a_2\overline{Q}_k(t)=0,\\ -F_2\overline{P}_k{}'(t)-c_2\overline{Q}_{k+1}(t)=0,\end{cases}$$

а это приводит последнее к следующей системе разностных уравнений:

$$\begin{cases}\overline{P}_{k+1}(t)=-\dfrac{1}{F_2}\overline{Q}_k'(t)-\dfrac{2a_2}{F_2}\overline{Q}_k(t),\\ \overline{Q}_{k+1}(t)=-\dfrac{F_2}{c_2}\overline{P}_k'(t), \qquad k\ge 0.\end{cases}\tag{26}$$

Решая разностную систему (26) при $k=0,1,2,3$ получим выражение, подобное (9) – (12), из которых, аналогично (13), (14) имеем:

$$\begin{cases}\overline{P}_{2k}(t)=\left(\dfrac{d}{dt}+2a_2\right)^k\dfrac{\overline{P}_0^{(k)}(t)}{c_2^k},\\ \overline{Q}_{2k}(t)=\left(\dfrac{d}{dt}+2a_2\right)^k\dfrac{\overline{Q}_0^{(k)}(t)}{c_2^k}, \qquad k\ge 0,\end{cases}\tag{27}$$

и

$$\begin{cases} \overline{P}_{2k+1}(t) = -\left(\dfrac{d}{dt} + 2a_2\right)^{k+1} \dfrac{\overline{Q}_0^{(k)}(t)}{F_2 c_2^k}, \\ \overline{Q}_{2k+1}(t) = -\left(\dfrac{d}{dt} + 2a_2\right)^{k} \dfrac{F_2 \overline{P}_0^{(k+1)}(t)}{c_2^{k+1}}, \qquad k \ge 0. \end{cases} \tag{28}$$

с этим установлена следующая

Теорема 2. Если $F_2,\ a_2,\ c_2$ действительные постоянные числа и $\overline{P}_0(t),\ \overline{Q}_0(t)$ принадлежат классу $C^\infty(0,T)$, которые удовлетворяют соотношению:

$$\left|\overline{P}_0^{(k)}(t)\right| \le L, \quad \left|\overline{Q}_0^{(k)}(t)\right| \le L, \ k \ge 0,$$

и

$$\left|\frac{1+2a_2}{c_2}\right| < 1,$$

где L некоторое постоянное действительное число то $\overline{P}_k(t)$ и $\overline{Q}_k(t)$, заданные с помощью (27) и (28), ограничены и ряды, приведенные решение в виде (25) сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство проводится аналогично теореме 1. Приведем аналогичные оценки для решений данного случае. Действительно исходя из условии приведенной теоремы 2, выражения, входящие в (27) и (28), имеют вид

$$\left|\overline{P}_{2k}(t)\right| \le L\left(\frac{1+2a_2}{c_2}\right)^k, \tag{29}$$

$$\left|\overline{Q}_{2k}(t)\right| \le L\left(\frac{1+2a_2}{c_2}\right)^k, \tag{30}$$

$$\left|\overline{P}_{2k+1}(t)\right| \le L\left(\frac{1+2a_2}{c_2}\right)^{k+1} \frac{c_2}{F_2}, \tag{31}$$

и

$$\left|\overline{Q}_{2k+1}(t)\right| \le L\left(\frac{1+2a_2}{c_2}\right)^{k} \frac{F_2}{c_2}. \tag{32}$$

Тогда из (25) имеем:

$$\left|P(x,t)\right| \le \left|\sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_{2k}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| + \left|\sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_{2k+1}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \le$$

$$\leq L\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+2a_2}{c_2}\right)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+2a_2}{c_2}\right)^{k+1}\frac{c_2}{F_2}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right],$$

и

$$|Q(x,t)|\leq\left|\sum_{k=0}^{\infty}\overline{Q}_{2k}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right|+\left|\sum_{k=0}^{\infty}\overline{Q}_{2k+1}(t)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|\leq$$

$$\leq L\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+2a_2}{c_2}\right)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+2a_2}{c_2}\right)^{k}F_2\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right].$$

Эти ряды сходятся равномерно при $x\in[l,2l]$.

Наконец, для дебита $Q(2l,t),\ P(2l,t)$ имеем следующие аналитические выражения.

$$\begin{cases} Q(2l,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{Q}_k(t)\dfrac{(2l)^k}{k!}, \\ P(2l,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k(t)\dfrac{(2l)^k}{k!}, \end{cases} \tag{33}$$

при $k=0$, где $P_0(l+0,t)=P(l+0,t),\quad Q_0(l+0,t)=Q(l+0,t)$. Отметим, что $\overline{P}_k(t),\ \ \overline{Q}_k(t)$ определяются соотношениями (27), (28).

Таким образом, задавая различные граничные значения для $Q_0(t),\ \ P_0(t)$ можем получить различные объемы дебита $Q(2l,t)$, которые далее могут быть использованы в качестве управляющих воздействий для газлифтного процесса.

Теперь вычислим погрешность второго этапа рассматриваемого процесса. Аналогично первому этапу для приближенного решения из (25) имеем:

$$\begin{cases} P_{2N_2}(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{2N_2}\overline{P}_k(t)\dfrac{x^k}{k!}, \\ Q_{2N_2}(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{2N_2}\overline{Q}_k(t)\dfrac{x^k}{k!}, \end{cases} \tag{34}$$

а погрешность имеет вид:

$$\begin{cases} \approx\!\!\!\!\!\!P_{2N_2+1}(x,t)=P(x,t)-P_{2N_2}(x,t)=\sum\limits_{k=2N_2+1}^{\infty}\overline{P}_k(t)\dfrac{x^k}{k!}, \\ \approx\!\!\!\!\!\!Q_{2N_2+1}(x,t)=Q(x,t)-Q_{2N_2}(x,t)=\sum\limits_{k=2N_2+1}^{\infty}\overline{Q}_k(t)\dfrac{x^k}{k!}. \end{cases} \tag{35}$$

Учитывая ограничения, приведенные в теореме 2 и оценки (29) – (32) получим:

$$\left|\tilde{\tilde{P}}_{2N_2+1}(x,t)\right| \le \sum_{k=N_2}^{\infty} \left|\overline{P}_{2k+1}(t)\right| \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \left|\overline{P}_{2k}(t)\right| \frac{x^{2k}}{(2k)!} \le$$

$$\le L\sum_{k=N_2}^{\infty}(1+2a_2)^{k+1} \frac{1}{F_2 c_2^k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + L\sum_{k=N_2+1}^{\infty}(1+2a_2)^k \frac{1}{c_2^k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \le \qquad (36)$$

$$\le L\sum_{k=N_2}^{\infty} \frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{\sqrt{c_2(1+2a_2)}}{F_2} + L\sum_{k=N_2+1}^{\infty} \frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2k}}{(2k)!},$$

если

$$\tilde{L} = \max\left\{L\frac{\sqrt{c_2(1+2a_2)}}{F_2},\ L\right\}.$$

Из (36) имеем:

$$\left|\tilde{\tilde{P}}_{2N_2+1}(x,t)\right| \le \tilde{L}\sum_{k=2N_2+1}^{\infty} \frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{k}}{(k)!} = \frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2N_2+1}}{(2N_2+1)!}\cdot \tilde{L}$$

$$\cdot\left[1+\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+2}+\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^2}{(2N_2+2)(2N_2+3)}+\ldots\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{S-1}}{(2N_2+2)(2N_2+3)\ldots(2N_2+S)}+\ldots\right]<$$

$$<\tilde{L}\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2N_2+1}}{(2N_2+1)!}\cdot\left[1+\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+2}+\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^2}{(2N_2+2)^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{S-1}}{(2N_2+2)^{S-1}}\right]=\tilde{L}\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2N_2+1}}{(2N_2+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+2}},$$

и

$$\left|\tilde{\tilde{Q}}_{2N_2+1}(x,t)\right| \le \sum_{k=N_2}^{\infty}\left|\overline{Q}_{2k+1}(t)\right|\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\left|\overline{Q}_{2k}(t)\right|\frac{x^{2k}}{(2k)!}\le$$

$$\le L\sum_{k=N_2}^{\infty}\frac{(1+2a_2)^k}{c_2^{k+1}}F_2\,\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+L\sum_{k=N_2+1}^{\infty}(1+2a_2)^k\,\frac{1}{c_2^k}\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}\le \tag{37}$$

$$\le L\sum_{k=N_2}^{\infty}\frac{\left(2l\sqrt{\dfrac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{F_2}{\sqrt{c_2(1+2a_2)}}+L\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\frac{\left(2l\sqrt{\dfrac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2k}}{(2k)!},$$

если

$$\tilde{\tilde{L}}=\max\left\{L\frac{F_2}{\sqrt{c_2(1+2a_2)}},\,L\right\},$$

Таким образом, из (37) получим:

$$\left|\tilde{\tilde{Q}}_{2N_2+1}(x,t)\right|\le \tilde{\tilde{L}}\sum_{k=2N_2+1}^{\infty}\frac{\left(2l\sqrt{\dfrac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{k}}{(k)!}=$$

$$=\tilde{\tilde{L}}\frac{\left(2l\sqrt{\dfrac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2N_2+1}}{(2N_2+1)!}\left[1+\frac{2l\sqrt{\dfrac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(2l\sqrt{\dfrac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2}}{(2N_2+2)(2N_2+3)}+\ldots+\frac{\left(2l\sqrt{\dfrac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{S-1}}{(2N_2+2)(2N_2+3)\ldots(2N_2+S)}+\ldots\right]<$$

$$<\tilde{\tilde{L}}\frac{\left(2l\sqrt{\dfrac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2N_2+1}}{(2N_2+1)!}\cdot\left[1+\frac{2l\sqrt{\dfrac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+2}+\right.$$

$$
\left.+\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^2}{(2N_2+2)^2}+\ldots+\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{S-1}}{(2N_2+2)^{S-1}}+\ldots\right]=
$$

$$
=\tilde{\tilde{L}}\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2N_2+1}}{(2N_2+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+2}}.
$$

Наконец, принимая обозначение

$$
L_1=\max\left\{\tilde{L},\tilde{\tilde{L}}\right\},
$$

и предполагая, что

$$
\frac{L_1}{1-\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+2}}\approx 1,
$$

получим:

$$
\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2N_2+1}}{(2N_2+1)!}=\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{1}\cdot\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2}\ldots\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+1}\leq
$$

$$
\leq\frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2N_2+1}}{(2N_2+1)!}=\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{1}\cdot\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2}\ldots\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+1}\leq
$$

$$\le \left[\frac{\sum_{k=1}^{2N_2+1} \frac{2l}{k}\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+1}\right]^{2N_2+1} = \frac{\left(2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}\right)^{2N_2+1}}{(2N_2+1)!}\left(\sum_{k=1}^{2N_2+1}\frac{1}{k}\right)^{2N_2+1} \approx$$

$$\approx \left[\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{2N_2+1}\ln(2N_2+1)\right]^{2N_2+1} \le \left(\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{(2N_2+1)^{1-0,1}}\right)^{2N_2+1} = £^{\,2N_2+1},$$

т.е.

$$\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{(2N_2+1)^{0,9}} = £, \tag{38}$$

или же

$$2N_2+1 = \left(\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{£}\right)^{\frac{10}{9}}.$$

А это приводит нас к выражению

$$2N_2+1 = \left(\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{£}\right)^{\frac{10}{9}}, \tag{39}$$

Таким образом, определение числа слагаемых при $i = 2$ в подъемнике определяется по формулой

$$2N_2+1=\left[\left(\frac{2l\sqrt{\dfrac{1+2a_1}{c_2}}}{0{,}9}\right)^{\frac{10}{9}}\right], \qquad (40)$$

где $[\cdot]$ - целая часть правой части (40).

6. Вычислительный алгоритм

Для нахождения приближенного решения задачи газлифта (1), (2), (21), (23) можем поступать следующим образом: на основе оценки погрешности (19), (38) можем задавать число слагаемых N в рядах (3). Это фактически заранее обеспечивает при заданных $\pounds>0$ решениях $P(x,t),\ Q(x,t)$ из (1), (2), (23), которые отличаются от точных решений $P(x,t),\ Q(x,t)$ с точностью

$$\left|P(x,t)-\overline{P}(x,t)\right|\le \pounds, \qquad \left|Q(x,t)-\overline{Q}(x,t)\right|<\pounds, \qquad (41)$$

при любых x,t в заданных областях .

Таким образом, принимая $N=\max\{N_1,N_2\}$ где N_1 и N_2 определяются из (20), (40), уже при заданных N можем найти $P_k(t)$ и $Q_k(t)$ из (13), (14), (27), (28), подставляя которые в (3) можем определить $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ с заданной точностью £ как в кольцевой области, так и в подъемнике. Для того, чтобы полностью решать задачи газлифта и определять дебит $Q(2l,t)$ надо в точке $(l-0,t)$ представить $P(l-0,t),\ Q(l-0,t)$ в виде (22). Подставляя эти значения P и Q в (23) можем определить $P(l+0,t),\ Q(l+0,t)$ как начальные условия для движения ГЖС из (1) при $(i=2)$ в подъемнике. Далее при этих значениях можно найти решение задачи (1), (2), (21) в виде (3), (25).

Резюмируя вышесказанное, можем предложить следующий вычислительный алгоритм для нахождения решения задачи газлифта для определения движения (1), (2), (23).

Алгоритм.

1. Задаются параметры $F_i, g, a_i, c_i, {}^\circ{}_i (i=1,2)$ и граничные данные $Q_0(t),\ P_0(t)$.
2. Вычисляются производные $Q_0^k(t),\ P_0^k(t)$ и с помощью (20) и (40) определяется число слагаемых N .

3. Из (3) и (14) определяются $Q_k(t),\ \ P_k(t)$ при заданных $k = N$.

4. Из (22) восстанавливаются $P(l-0,t),\ \ Q(l-0,t)$ в виде

$$\overline{P}(l-0,t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\frac{l^k}{k!},\ \ \overline{Q}(l-0,t) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t)\frac{l^k}{k!}. \qquad (42)$$

5. Из (23) выражения для $P(l+0,t),\ \ Q(l+0,t)$ определяются в виде

$$P(l+0,t) = F_{¢}^{1}\sum_{k=0}^{N} P_k(t)\frac{l^k}{k!} + ¡_1(\sum_{k=0}^{N} P_k(t)\frac{l^k}{k!},\sim), \qquad (43)$$

$$Q(l+0,t) = F_{¢}^{1}\sum_{k=0}^{N} Q_k(t)\frac{l^k}{k!} + ¡_2(\sum_{k=0}^{N} Q_k(t)\frac{l^k}{k!},\quad).$$

6. Из (27) и(28) $\overline{Q}_k(t),\ \ \overline{P}_k(t)$ определяются в виде

$$\left.\begin{aligned} \tilde{P}_{2k}(t) &= \left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)^k \frac{P^{(k)}(l+0,t)}{c_2^k} \\ \tilde{Q}_{2k}(t) &= \left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)^k \frac{Q^{(k)}(l+0,t)}{c_2^k} \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

и

$$\tilde{P}_{2k+1}(t) = -\left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)^{k+1} \frac{Q^{(k)}(l+0,t)}{F_2 c_2^k}, \qquad (45)$$

$$\tilde{Q}_{2k+1}(t) = -\left(\frac{d}{dt} + 2a_2\right)^{k} \frac{F_2 P^{(k+1)}(l+0,t)}{c_2^{k+1}}$$

при условии $\left|\dfrac{1+2a_2}{c_2}\right| < 1$.

7. Для каждой точки (x,t) из подъемника, $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ определяются подобно (25) в виде

$$P(x,t) = \sum_{k=0}^{N} \overline{P}_k(t)\frac{x^k}{k!},\quad Q(x,t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\overline{Q}_k(t)}{k!}\frac{x^k}{},\quad x \in [l,2l]. \qquad (46)$$

8. Вычисляется дебит $Q(2l,t)$ в виде

$$Q(2l,t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{Q_k(t)}{k!}(2l)^k.$$

Пример. Проиллюстрируем выше предложенный алгоритм в случае, когда из (2) величины $P_0(t)$ и $Q_0(t)$ постоянные, т.е.

$$P(0,t) = P_0,\qquad Q(0,t) = Q_0, \qquad (47)$$

где P_0 и Q_0 постоянные, действительные числа. Для того, чтобы вычислить $P(x,t)$, $Q(x,t)$ из (3) сначала находим $P_k(t)$ и $Q_k(t)$ при $k > 0$ из (8) в следующем виде

$$P_1(t) = -\frac{2a_1}{F_1} Q_0, \quad Q_1(t) = 0,$$

$$P_k(t) = 0, \qquad Q_k(t) = 0, \qquad (k \geq 2).$$

Тогда из (3) $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ в интервале $0 < x < l - 0$ будет

$$P(x,t) = P_0 - \frac{2a_1}{F_1} Q_0 \cdot x, \quad Q(x,t) = Q_0 \tag{48}$$

Подставляя (48) в систему (1) легко можно проверить, что они являются точными решениями исходной системы, где из правой части (20) в точке $(l - 0, t)$

$$P(l-0,t) = P_0 - \frac{2a_1}{F_1} Q_0 \cdot l, \quad Q(l-0,t) = Q_0. \tag{49}$$

Для простоты предположим, что в (21)

$$\overline{P}(t) = \overline{P},\ \overline{Q}(t) = \overline{Q},\ \sim_1 = -1, \sim_2 = \sim_3 = 0,$$

$${}_1 = 1, \quad {}_2 = \quad {}_3 = 0,\ F_{\text{¢}}^1 = F_{\text{¢}}^2 = 1,\ \text{¡}_1 = P^2(l-0,t),\ \text{¡}_2 = -Q^2(l-0,t)$$

тогда имеем

$$P(l+0,t) = P(l-0,t) + P^2(l-0,t) \cdot \overline{P} \equiv P_{l+0} \tag{50}$$

$$Q(l+0,t) = Q(l-0,t) - Q^2(l-0,t) \cdot \overline{Q} \equiv Q_{l+0}.$$

Как видно из (48) $P(l+0,t)$ и $Q(l+0,t)$ из (49) являются постоянными и повторяя вышеприведенную схему с граничными условиями (50) для решения системы гиперболических уравнений (24), имеем

$$P(x,t) = P_{l+0} - \frac{2a_2}{F_2} Q_{l+0} \cdot x, \quad Q(x,t) = Q_{l+0}. \tag{51}$$

Непосредственной подстановкой (51) в (24) легко убедиться, что она является точным решением задачи (24). Таким образом, можно определить давление $P(2l,t)$ и дебит $Q(2l,t)$ из (51).

Отметим, что функция $P(x,t)$ в интервалах $0 < x < l - 0$ и $l + 0 < x < 2l$ является плоскостью, параллельной оси t, а $Q(x,t)$ в этих же интервалах будет параллельной как оси x, так и t, т.е. параллельно плоскости (xt).

Пусть параметры F_i, $°_i$, c_i, $ª_i$ входящие в уравнение (10 имеют следующий вид [9], т.е.

$0 \le x \le l, \quad l = 1485 \ m, \ c = 331 \ m/c, \ \text{°} = 0.717 \ kq/m^3,$

при

$F_1 = \sqrt{114^2 - 73^2} 10^{-3} \ m, \ \text{ª} = 0.01;$

при $l \le x \le 2l: \ c = 850 \ m/c, \ \text{°} = 0.717 \ kq/m^3, \ F_2 = 0.073 \ m, \ \text{ª} = 0.23.$

Теперь, при различных постоянных Q_0 вычислим $Q(2l,t)$ по формуле (50), которая показывает закономерность изменений $Q(2l,t)$, приведенная на следующем графике,

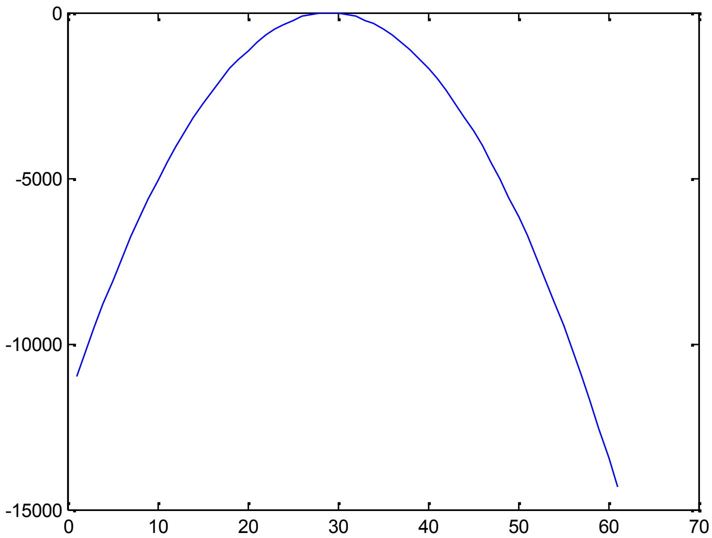

Рис. 1. Зависимость дебита $Q(2l,t)$ от начального объема газа

который подтверждается известными результатами из практики [4].

Литература

1. Шуров В.И., Технология и механика добычи нефти. М., Недра, 1983.
2. Camponogara E., Plucenio A., Teixeira A.F., Campos S.R.V., An automation system for gas-lifted oil wells: Model identification control and optimization. Journal of Petroleum Science and Engineering, 70, 2010, pp.157-167.
3. Aliev F.A., Ilyasov M.K., Ismailov N.A., Gasımov Y.S., Mutallimov M.M., Jamalbekov M.A., Rajabov M.F., Mathematical simulation and control of gaslift process: from theory to practice, Proceedings of BraNobel conference, Baku 22-23, 2012, pp.66-80.

4. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х. Джамалбеков М.А., Моделирование работы газлифтной скважины, Докл. НАН. Азербайджана, 2008, № 4, с.30-41.
5. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б., Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса, Прикладная Механика, 2010, № 6, с.115-122.
6. Birhkoff G.D., a) On the asymptotic character of the solution of certain linear differential equations constatining a parametr. Trans. Am. Math Soc. 9, (1908) 219-231. b) Boundary Value and expension problems of ordinary linear differential equations. Amer. Math. Soc. 9.4(1908).
7. Эрдейи А., Асимптотические разложения, ГИФМЛ, Москва, 1962, с.127.
8. Гельфонд А.О., Исчисление конечных разностей, Москва, Наука, 1967, с.375.
9. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova N.L. Extermal solution of the problem of the choice of optimum modes for gaz-lift process, Appl.Comput. Math., Vol.11, No.3, pp.348-357.
10. Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М., Хасаев А.М., Гусев В.И. Технология и техника добычи нефти, М., Недра, 1986.
11. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Ismailov N.A., Racabov M.F., An algorithm for constructing optimal controllers for gas-lift operation, Automation and Telemechanics, No.8, 2012, pp.3-15.
12. Aliev, F.A., Djamalbekov, M.A., Ilyasov, M.Kh., Mathematical simulation and control of gas-lift, Journal of Computer and Systems Science International, Vol.50, No.1, 2011, pp.805-814.

Neftçıxarmada qarşıya çıxan hiperbolik tip sistem üçün bir sərhəd məsələsinin sıralar üsulu ilə həlli

N.A. Əliyev, Ф.Ə. Əliyev, A.P. Quliyev, M.X. İlyasov

XÜLASƏ

Qazliftin riyazi modelinə baxılır, harada ki, qazın və maye-qaz qarışığının uyğun oblastlarda hərəkəti xüsusi törəməli hiperbolik tip tənliklər sistemi ilə yazılır. Göstərilir ki, uyğun sərhəd şərtləri daxilində məsələnin yeganə həlli var və başlanğıc şərtləri ixtiyari ola bilməz, başqa sözlə onlar sərhəd şərtlərinin seçilməsindən asılıdırlar. Sonra hərəkətin həlqəvari trubanın sonundan qaldırıcı trubanın başlanğıcına keçidi implus sistemi ilə yerinə yetirilir, harada ki, sağ tərəf həlqəvari boruda olan trayektoriyanın sonundakı qiymətinin kvadratik çoxhədlisi kimi seçilir (parabolik forma). Sonsuz sıra üsulu əsasında təklif olunan sərhəd məsələsinin həlli üçün ədədi alqoritmi verilir və qaldırıcının hər nöqtəsində təzyiq və maye-qaz qarışığının trayektoriyası bərpa olunur. Praktikadan məlum olan konkret misal üçün riyazi modelin adekvatlığı göstərilir.

Açar sözlər: Hiperbolik sistem, riyazi model, qazlift, sərhəd məsələsi, impuls sistem, sonsuz sıra.

Method series to solving a boundary value problem for the system of hyperbolic equations, arising in the oil production

N.A. Aliev, F.A. Aliev, A.P. Guliyev, M.Kh. Ilyasov

ABSTRACT

A mathematical model of gas lift is considered, where the motion of gas and liquid mixture in the corresponding domains are described by the system of partial differential equations of hyperbolic type. It is shown that under appropriate boundary conditions, the problem has a unique solution and the initial conditions can not be arbitrary, i.e. they depend on the choice of boundary conditions. Further, the movement from the well bottom to the lifting are described by the impulse system, in which the right hand side is taken in form of quadratic polynomial of the annular tube end. Based on the method of infinite series numerical algorithm is given for solving boundary value problem and a trajectory is reconstructed for the pressure and volume of GLM in the each point of lift. On the applied example the adequacy of the proposed mathematical model is shown .

Keywords: hyperbolic system, mathematical model, gaslift, boundary value problem, impulse system, the infinite series.